Subiecte clasa a V-a – proba teoretică

Subiectul I

La problemele 1-6 se va consemna numai rezultatul final.

Fiecare din problemele 1-6 se punctează cu 10 puncte.

1. Suma numerelor naturale a și b care verifică relațiile $4a+3b=107$ și $2a+6b=112$ este egală cu ....

2. Se dă suma $S=2+3-4+5+6-7+8+9-10+...+98+99-100+101$. Atunci S = ...

3. Se dau numerele: $a=3^{28}$, $b=2^{12}\cdot 3^{20}$ și $c=2^{42}$. Cel mai mic dintre cele trei numere este .....

4. Restul împărțirii numărului $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2023+2025$ la 2024 este egal cu ....

5. Numărul numerelor de forma $\overline{ab0ab}$ divizibile cu 4 este egal cu ....

6. Dacă $\overline{abcd}-2\cdot\overline{abc}=2024$ atunci numărul $\overline{abcd}$ este egal cu ....

Subiectul II

La problemele 1-2 se cere redactarea integrală a rezolvării.

Fiecare din problemele 1-2 se punctează cu 15 puncte.

1. a) Aflați cel mai mare număr de 3 cifre care împărțit la 21 dă restul 14;

b) Calculați suma tuturor numerelor de 3 cifre care împărțite la 21 dau restul egal cu 14.

2. a) Arătați că: $1+3+3^2+3^3+...+3^{2023}=\left(3^{2024}-1\right):2$;

b) Notăm $a=3^{2024}-1$. Arătați că $2^5/a$.

Subiecte clasa a VI-a – proba teoretică

La problemele 1-6 se va consemna numai rezultatul final.

Fiecare din problemele 1-6 se punctează cu 10 puncte.

1) Fie numerele naturale nenule a, b, c astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{5}=\frac{b}{c}$

Dacă $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}=372$, numărul $a+b\cdot c$ este:

....

2) Media aritmetică a 5 numere este 336. Primele 3 sunt direct proporționale cu 2,7 și 12, iar al treilea, al patrulea și al cincilea sunt invers proporționale cu 3, 4 și 10. Numerele sunt:

....

3) Se consideră mulțimile $A=\{1^2,2^2,3^2,\dots\dots..2025^2\}$ și $B=\{1^3,2^3,3^3,\dots\dots\dots..2025^3\}$ Cardinalul mulțimii $A\cap B$ este:

....

4) Fie n=$2^{2030}+2^{2029}+29\cdot 2^{2024}$. Fie A mulțimea divizorilor comuni ai numerelor n^2 și 27040. Suma elementelor mulțimii A este:

....

5) În interiorul segmentului AB=160 cm se consideră punctele C și D astfel încât 3AC=2BC și 5AD=3BD. Distanța dintre punctele C și D este:

....

6) Într-o fabrica s-au copt mai puțin de 10000 fursecuri. Pentru a le transporta unui lanț de magazine acestea au fost împachetate și distribuite în cutii câte 9, apoi câte 10, câte 11 și câte 12. În primele trei situații rămâne câte un fursec neambalat, iar în a patra rămân 7.

Numărul maxim de fursecuri care ar fi putut fi coapte este ....

La problemele 7-8 se cere redactarea integrală a rezolvării.

Problemele 7-8 se punctează cu 15 puncte.

7) Se consideră numerele naturale nenule $a, b \in \mathbb{N}*$, $a > b$ care verifică relația $6 \cdot [a; b] + 6 \cdot a + b = 2022 \cdot (a; b)$. Determinați numerele a și b.

8) Pe parcursul anului 2024 la un magazin de jucării s-au vândut 235 de roboți. În fiecare lună numărul roboților a fost 16, 20 sau 25. Determinați numărul de luni în care s-au vândut exact 20 de roboți.

Subiecte clasa a VII-a – proba teoretică

SUBIECTUL I-Pe foaia de concurs scrieți numai rezultatele

1. Numărul de elemente, numere raționale, ale mulțimii $M = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots \dots \dots . . \sqrt{2025}\}$ este...... **10p**

2. Rezultatul calculului $\left(\frac{3}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{5}{\sqrt{48}}\right) \cdot \frac{\sqrt{1200}}{9}$ este.................... **10p**

3. Media geometrică a numerelor $a = \sqrt{4 + \sqrt{12 + \sqrt{169}}}$ *și* $b = \sqrt{13^2 - 5^2}$ **10p**

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC, $\measuredangle A = 90^\circ$. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci $\measuredangle BIC$ are măsura de............................ **10p**

5. Un trapez isoscel ortodiagonal are lungimile bazelor egale cu 12 cm și 20 cm. Atunci aria trapezului este............. **10p**

6. În rombul ABCD, BD=12 cm, AC=16cm. Atunci distanța de la D la AB este egală cu…...

10p

SUBIECTUL II-Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete

1. a) Determinați x, număr rațional pozitiv din egalitatea :

$\sqrt{x} \cdot 3^{2025} = (3^{2025} - 1) : (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots . \frac{1}{3^{2024}})$ **10p**

b) Fie $x_1, x_2, x_3 \dots\dots x_{2025}$ numere reale astfel încât

$\sqrt{(x_1 - 1)^2} + \sqrt{(x_2 - 2)^2} + \sqrt{(x_3 - 3)^2} + \dots\dots \sqrt{(x_{2025} - 2025)^2} \leq 0$ **5p**

Determinați media aritmetică a numerelor $x_1, x_2, x_3 \dots\dots x_{2025}$.

2. Fie ABCD un pătrat și $E \in (AC)$ $a.î$ $\frac{EA}{EC} = \frac{1}{2}$. Știind că aria pătratului este 100 cm^2 :

a) Arătați că E este centrul de greutate al triunghiului ABD. **5p)**

b) Determinați aria triunghiului AEB. **5p)**

c) Determinați distanța de la E la BC. **5p)**

Subiecte clasa a VIII-a – proba teoretică

La problemele 1-6 se va consemna numai rezultatul final.

Fiecare din problemele 1-6 se punctează cu 10 puncte.

1. Dacă $x, y, z \in \boldsymbol{R}, x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ și $x + y + z = \frac{3}{2}$, atunci produsul xyz are valoarea ....

2. Numărul numerelor întregi p care satisfac relația $p^2 - 6p \leq 9$ este ....

3. Numărul real a verifică egalitatea $a^2 + 2a = 1$.

Valoarea expresiei $E(a) = (a-1)(a-2)(a+3)(a+4)$ este ....

4. Fie intervalul $I = (a, b)$, unde $a, b \in \boldsymbol{R}$. Dacă $I \cap \boldsymbol{Z} = \{2021, 2022\}$ și $E = |a - 2020| + |b - 2023| + |a - b|$, atunci expresia E este egală cu ....

5. Trei fețe ale unui paralelipiped dreptunghic au lungimile diagonalelor direct proporționale cu numerele $\sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$. Știind că lungimea diagonalei paralelipipedului este de 6 cm, produsul celor trei dimensiuni ale paralelipipedului, în cm^3, este ....

6. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, unde G_1 este centrul de greutate al triunghiului VAB, iar G_2 este centrul de greutate al triunghiului VBC. Dacă $G_1G_2 = \sqrt{2}\ cm$, atunci aria pătratului $ABCD$, exprimată în cm^2 este egală cu ....

La problemele 7-8 se cere redactarea integrală a rezolvării.

Problemele 7-8 se punctează cu 15 puncte.

7. Un tetraedru regulat este secționat cu un plan după un paralelogram. Arătați că paralelogramul este dreptunghi.

8. Se consideră numerele reale a, b, c, A și B astfel:

$0 < a < b < c$, iar $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, B = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$. Arătați că $A > B$.

Bareme clasa a V-a – proba teoretică

Subiectul I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
20p	**20p**	**20p**	**20p**	**20p**	**20p**
$a+b=30$	S = 1718	$c=2^{42}$	r = 1	22	2528 și 2530

Subiectul II

1

a) $999=21\cdot 47+12$ 6p

$21\cdot 46+14=980$ și $21\cdot 47+14=1001>999$ 4p

Răspuns: 980 ....4p

b) Cel mai mic număr de 3 cifre cu proprietatea din enunț este $21\cdot 5+14=119$ 4p

$S=(21\cdot 5+14)+(21\cdot 6+14)+...+(21\cdot 46+14)$ 6p

Calculează și găsește: $S=23079$ 6p

2

a)

$$\left.\begin{array}{l} S=1+3+3^2+3^3+...+3^{2023} \mid \cdot 3 \\ 3S=3+3^2+3^3+...+3^{2023}+3^{2024} \end{array}\right| \Rightarrow$$ 8p

$$\Rightarrow 3S-S=\left(3+3^2+3^3+...+3^{2023}+3^{2024}\right)-\left(1+3+3^2+3^3+...+3^{2023}\right)$$

Finalizează și găsește $S=\left(3^{2024}-1\right):2$ 6p

b)

Din a) avem că $3^{2024}-1=2\cdot S$. Pentru ca a 2^5 este suficient să arătăm că $S \vdots 2^4$

$S=\left(1+3+3^2+3^3\right)+\left(3^4+3^5+3^6+3^7\right)+\ldots+\left(3^{2020}+3^{2021}+3^{2022}+3^{2023}\right)$ 4p

$S=\left(1+3+3^2+3^3\right)+3^4\left(1+3+3^2+3^3\right)+\ldots+3^{2020}\left(1+3+3^2+3^3\right)$

$=40\cdot(1+3^4+3^8+\ldots+3^{2020})=2^3\cdot5\cdot(1+3^4+3^8+\ldots+3^{2020})$ 4p

În suma $1+3^4+3^8+\ldots+3^{2020}$ avem 506 numere impare deci suma = număr par 4p

Finalizare: $2^5/a$ 4p

Bareme clasa a VI-a – proba teoretică

1)

$$a = \frac{2b}{3},\ \ c = \frac{5b}{3}\ \ \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = \frac{b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{b}{3} = b \Rightarrow b = 372,$$

$$a = 248,\ \ c = 620 \Rightarrow a + b \cdot c = 230888$$

20p

2)

Notăm cele cinci numere cu a, b, c, d, e și avem a + b + c + d + e = 1680

$\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{12} = k$ și $c \cdot 3 = d \cdot 4 = e \cdot 10 \ \Rightarrow$

$a = 2k\ , b = tk, c = 12k, d = 9k, e = \frac{18}{5}k$

$a + b + c + d + e = 1680 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow$

$a = 100,\qquad b = 350,\qquad c = 600,\qquad d = 450,\qquad e = 180$

20p

3)

$n \in A \cap B \Leftrightarrow n$ pătrat perfect și cub perfect, deci $n = x^6$

căutăm în A elementele care sunt cuburi perfecte

$2023^2 > x^6 \rightarrow 2023 > x^3$.

$13^3 = 2197$, $12^3 = 1728 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, \dots, 12\} \Rightarrow card\ A \cap B = 12$

20p

4)

$n = 2^{2024}(2^6 + 2^5 + 29) = 2^{2024} \cdot 5^3,$

$27040 = 2^5 \cdot 5 \cdot 13^2 \Rightarrow (n, 27040) = (n^2, 27040) = 160$

20p

5)

Avem 3 · AC = 2·BC, (1), AC +CB = AB, deci AC + BC = 160, (2

Înmulţim (2) cu 2 şi avem 2 ·AC + 2· BC = 320 şi utilizând (1) ⇒ 5·AC = 320 ⇒

AC = 64 cm

Analog se calculează şi se obţine BD = 100 cm

Dacă DB = 100 cm, atunci AD = 60 cm

distanta dintre C si D este 4 cm

20p

6)

Cum [9,10,11]=990 numărul de fursecuri trebuie să fie de forma 990k+1 și împărțit la 12 să dea restul 7. $990 \cdot 10 + 1 = 9901$, dar nu verifica a doua condiție , $990 \cdot 9 + 1 = 8911$ care verifica și a doua condiție . Răspuns 8911.

20p

7)

$(a; b) = d \in \mathbb{N}_* \Rightarrow a = xd; b = yd; (x; y) = 1, x, y \in \mathbb{N}_*$ ....**(5p)**

$(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b \Rightarrow d \cdot [a, b] = d^2 \cdot xy \Rightarrow [a, b] = dxy$ ....**(5p)**

$6 \cdot dxy + 6a + b = 2022 \cdot d \Rightarrow 6xy + 6x + y = 2022 \Rightarrow (6x + 1) \cdot (y + 1) = 2023$ ....**(5p)**

$2023 = 1 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 = 17 \cdot 119 = 119 \cdot 17 = 289 \cdot 7 = 2023 \cdot 1$ ....**(5p)**

$\{6x + 1 = 1 , 6x + 1 = 7, \ 6x + 1 = 17, \ 6x + 1 = 119 , 6x + 1 = 2023\}$ nu convin , dar din $6x + 1 = 289 \Rightarrow x = 48$ și $y = 6$ (nu sunt prime între ele) .... **(5p)**

Soluția este mulțimea vidă ....**(5p)**

8)

Notăm cu *a* numărul de luni în care s-au vândut 16 roboți, cu *b* numărul de luni în care s-au vândut 20 roboți și cu *c* numărul de luni în care s-au vândut 25 roboți. Astfel obținem *a*+*b*+*c* = 12 și 16*a*+20*b*+25*c* = 235... **(5p)**

Deoarece 20*b*, 25*c* și 235 sunt multipli lui 5 deducem că 16*a* este multiplu al lui 5 .... **(4p)**

Cum 16 și 5 sunt prime între ele deducem că *a* este multiplu al lui 5, iar *a*+*b*+*c*=12⟹ *a*∈ {0; 5; 10} .... **(4p)**

Cazurile *a* = 0 și *a* = 10 nu convin, deci *a* = 5 .... **(4p)**

În acest caz opținem *b*+*c* = 7 și 20*b*+25*c* = 235 – 80 ⟹ 4*b*+5*c* =31 .... **(4p)**

Deci 31 – 4*b* este multiplu de 5, situație care convine doar pentru *b* = 4 și *c* = 3 .... **(4p)**

În concluzie, în 4 luni ale anului s-au vândut exact 20 roboți .... **(5p)**

Bareme clasa a VII-a – proba teoretică

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 20 de puncte, fie zero puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I (60 de puncte)

1. **45** **20p**
2. **3** **20p**
3. **6** **20p**
4. 135^o **20p**
5. **256** $\boldsymbol{cm}^2$ **20p**
6. **9,6 cm** **20p**

SUBIECTUL al II-lea(30 de puncte)

1. **a)** Calculul lui S=$\mathbf{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots.\frac{1}{3^{2024}}}=\frac{\mathbf{3^{2025}-1}}{\mathbf{2\cdot 3^{2024}}}$ **10p**

$\sqrt{\mathbf{x}}\cdot \mathbf{3^{2025}}=\mathbf{2\cdot 3^{2024}} \Leftrightarrow \sqrt{\mathbf{x}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \Leftrightarrow \mathbf{x}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$ **10p**

b) $\sqrt{(\boldsymbol{x_1}-\mathbf{1})^2}+\sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\mathbf{2})^2}+\sqrt{(\boldsymbol{x_3}-\mathbf{3})^2}+\ldots\ldots\sqrt{(\boldsymbol{x_{2025}}-\mathbf{2025})^2}\le \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$|x_1-1|+|x_2-2|+|x_3-3|+\ldots\ldots|x_{2025}-2025|\le 0$ **4p**

$|x_1-1|\ge 0, |x_2-2|\ge 0, \ldots\ldots |x_{2025}-2025|\ge 0$..**2p**

Finalizare $x_1=1$, $x_2=2$, ... $x_{2025}=2025$ **2p**

Media aritmetică este 1013..**2p**

2. **a)** $\frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow EC = 2 \cdot EA \Leftrightarrow EO + OC = 2 \cdot EA \Leftrightarrow EA = 2 \cdot EO$..............................**6p**

În triunghiul ABD ,AO este mediană și $EA = 2 \cdot EO$,atunci E-centru de greutate..................**4p**

b) Determinarea AB=10cm , AC=$10\sqrt{2}$ cm și $AE = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ **6p**

Determinarea ariei $A_{AEB} = \frac{50}{3}$ **4p**

c) Determinarea ariei $A_{CEB} = \frac{100}{3}$..**4p**

Finalizare $d(E, BC) = \frac{2 \cdot A_{CEB}}{BC} = \frac{20}{3}$..**6p**

Bareme clasa a VIII-a – proba teoretică

Nr. exercițiu	1 (20p)	2 (20p)	3 (20p)	4 (20p)	5 (20p)	6 (20p)
Răspuns	$\frac{1}{8}$	9	14	3	36	9

7. Două laturi opuse ale paralelogramului din planul de secțiune sunt paralele.
Fețele tetraedrului care conțin aceste laturi se intersectează după o muchie - de exemplu AB - paralelă cu laturile, deci și cu planul de secțiune.

Analog, muchia CD este paralelă cu celelalte două laturi opuse ale paralelogramului.
Cum $AB \perp CD$, rezultă că laturile consecutive ale paralelogramului sunt perpendiculare, deci acesta este dreptunghi.

(30p)

8. $A - B = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} = \frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc} - \frac{b^2c+a^2b+c^2a}{abc} =$
$\frac{(a^2c-c^2a)+(b^2a-b^2c)+(c^2b-a^2b)}{abc} = \frac{(a-c)(ac+b^2-ba-bc)}{abc} = \frac{(a-c)(b-c)(b-a)}{abc} = \frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{abc} > 0$,
ținând cont de ordinea numerelor a, b, c.

Deci $A > B$.

(30p)